3.1.3. Fuzzy Mantık ve Küme Teorisi

Araştırmacılar ve pratikçiler, belirsizlik hakkında daha fazla şey öğrenebilmek için çok çaba sarfetmektedirler. 1965 yılında Zadeh belirsizliğin temsili için Fuzzy küme teorisini geliştirmiş ve bilim dünyası için çok önemli bir dönüm noktası olmuştur.

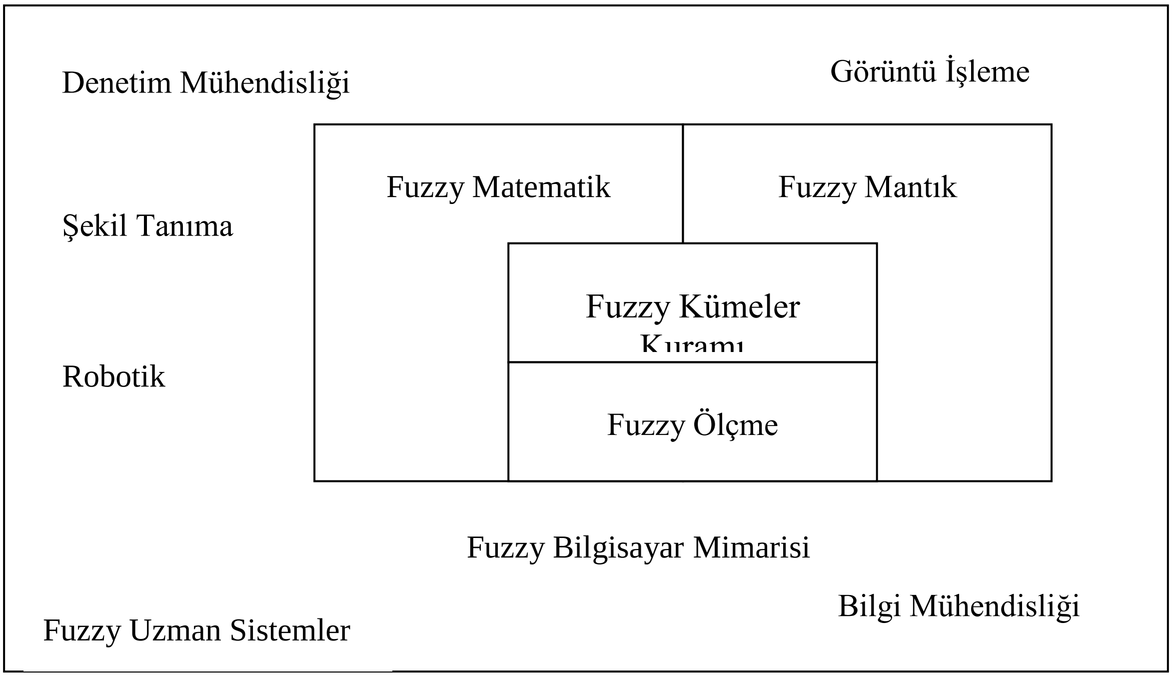
Fuzzy küme teorisinin amacı, belirsizlik ifade eden tanımlanması güç veya anlamı zor kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmektir. Modern mantıkta bir kümeyi oluşturan elemanlar keskin elemanlar olup her eleman bir kümenin üyesidir ya da değildir [44].

Fuzzy mantık, gözlemlerin analizi için genel bir fikir sağlayan mantık sistemlerinde karar vermek ya da sistemin kontrolü için kullanılan bir sistemdir. Bu sistemde oluşturulan fuzzy kümelerini karşılaştırır ve yaklaşık sonuçlarla gözlemlerin durumunu belirlenmeye çalışılır [45].

Fuzzy mantığın prensipleri ilk olarak Zadeh (1965) tarafından açıklanmıştır ve kapsamı gözlemleri üyelik derecelerine göre sınıflandırmadır. Fuzzy mantığın ana amacı sorgulamada değişkenler için uygun üyelik fonksiyonu kullanılarak kesin sınırların genişletilmesidir. Fuzzy mantık yaklaşımında her eleman oluşan üyelik fonksiyonuyla fuzzy kümelerine bağlıdır. Genelde üyelik derecesi [0,1] arasında gerçek sayılardır, 0 üyeliğin olmadığını, 1 tam üyeliği gösterir. Üyelik fonksiyonunun şekil ve formunun seçimi çok önemlidir ve karar verme yöntemleri için üretilen sonuçlarda güçlü etki sağlar. Her elemanın üyelik değerinin miktarı ait olduğu kümenin derecesidir. Fuzzy küme teorisi uygun üyelik fonksiyonunun kullanımıyla elde edilen üyelik değerlerinden dolayı uyuşumsuz değerler kümesini de oluşturmakta kullanılabilir [46].

Burrough (1989)'a göre fuzzy küme matematikte ve kavramsal modelde belirsizlik ya da karasızlıkla ilgili durumların değerlendirilmesinde kullanılır. Fuzzy analizi, yanlış ya da doğrudan biri gibi nitelik ya da derece kullanan fuzzy mantık tabanlıdır. Fuzzy analizinin sonucu mantıkla tam olarak tanımlanamaz. Fuzzy mantık fuzzy kümeleriyle kesin faktörlerin hesabı için ana sistematiği sağlar. Örneğin olası, çok olasılıklı değil, oldukça kesin ya da çok olası gibi fuzzy değerler ya da olasılıklar olarak gösterilebilir. Bu bakımdan Zadeh (1984)'e göre fuzzy mantık uzman sistemlerde belirsizliğin yönetimi için etkili bir araçtır [47], [48].

Fuzzy kümelerin uygulama alanları şu şekilde verilebilir.



Şekil 21. Fuzzy kümenin uygulama alanları

Küme teorisi klasik olarak şu şekilde açıklanabilir. Z bağımsız gözlemleri A kümesinin üyesidir ve A kümesi 0 ya da 1 arasında değer alan m üyelik fonksiyonuyla açıklanır. Örneğin,

$$m_{\tilde{A}(Z)} = 1, \quad \text{eğer } b_1 \le Z \le b_2 \qquad (131)$$

$$m_{\tilde{A}(Z)} = 0, \quad \text{eğer } Z < b_1 \text{ ya da } Z > b_2$$

Burada b_1 ve b_2 A kümesinin sınırlarını tanımlar. Klasik kümelerin yalnız binary üyelik fonksiyonuna izin verdiğine dikkat edilmelidir.

Fuzzy küme teorisi klasik küme teorisinin genişletilmiş halidir. Bir A fuzzy kümesi matematik olarak şu şekilde tanımlanır. Eğer Z = {z} uzay objelerini gösterirse, Z'de A fuzzy kümesi

$$A = \{z, m_{\tilde{A}}(z)\}, \qquad z \in Z \qquad (132)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada üyelik fonksiyonu $m_{\tilde{A}}(z)$, A kümesinde z'nin üyelik derecesi olarak bilinir. Genelde üyelik derecesi [0,1] arasında gerçek sayılardır, 0 üyeliğin olmadığını, 1 tam üyeliği gösterir.

Üyelik fonksiyonları bir fuzzy kümeyi ifade ettiklerinden, tanımlanmaları fuzzy küme teorisi içinde önemli bir yer tutar. Üyelik fonksiyonları değişken parametreleri olan bir fonksiyon veya bir tablo olarak ifade edilebilirler. Bu fonksiyonlar denetlenen duruma göre üçgen, çan, yamuk şeklinde olabilirler [49], [50].

3.1.3.1. Fuzzy Mantık Yöntemi İle Uyuşumsuz Gözlemlerin Belirlenmesi

Gözlemlerdeki gerçek hatalar genelde bilinemediği için düzeltmeler ve redundanslar uyuşumsuz ölçüler analizinde test için bir araç olarak kullanılır.

(31) eşitliğinde verilen lineer fonksiyonel modelin Δ model hataları vektörünü de içerdiğini düşünelim. Bu gözlem hataları ve düzeltmeler arasındaki matematiksel ilişki (37) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} &V = -Q_{vv}Q_{\ell\ell}^{-1}\Delta \\ &R = Q_{vv}Q_{\ell\ell}^{-1} \text{ Redundans matrisi} \\ &V = -R\Delta \end{aligned} \tag{133}$$

şeklindedir. R redundans matrisi gözlem hataları ile düzeltmeler arasındaki ilişkiyi gösterir. Açık formda, model hatalarından düzeltmelere dönüşüm

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & . & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & . & r_{2n} \\ . & . & . & . \\ r_{n1} & r_{2n} & . & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ . \\ . \\ \Delta_n \end{bmatrix} \tag{134}$$

eşitliği şeklindedir. Bu eşitlik her gözlemin düzeltmesinin redundans matrisinin karşılık gelen elemanları büyüklüğünde tüm gözlem hatalarından etkilendiğini gösterir. Hem korelasyonlu hem de korelasyonsuz dengelemede R redundans matrisinin rangı fazla ölçü sayısına eşittir ve dolayısıyla bu matris pozitif tanımlı değildir. Başka bir deyişle hatalar tek anlamlı olarak hesaplanamaz. Bu durumda istatistik karar sürecine dayanan gerek uyuşumsuz ölçü belirleme testleri gerekse robust kestiriminde, ölçü hataları (Δ_i) yerine düzeltmelerin (V_i) istatistik büyüklükleri ele alınır. Buna karşın fuzzy mantığında, redundans matrisi elemanlarından yararlanılarak, hataların düzeltmeler üzerindeki etkilerini belirleyen üyelik ilişkileri kurulabilmektedir.

(133) eşitliği irdelendiğinde; redundans matrisinin (R) satırları tüm ölçülerde ortaya çıkan olası ölçü hataların tek bir ölçü düzeltmesi üzerindeki toplam etkisini göstermektedir. Buna karşın sütun elemanları ise; her bir olası ölçü hatasının ayrı ayrı düzeltmeler üzerindeki katkısını ortaya koymaktadır. Özellikle ilgili sütun elemanları arasındaki ilişkiler, herhangi bir ölçünün uyuşumsuz olarak görünmesindeki olumsuz etkileri göstermektedir. Bu durum, en küçük kareler yönteminin hataları yayma ve aynı zamanda da gizleme özelliğinden kaynaklanan sorunları sorgulama olanağını sağlamaktadır [51].

Ayrıca, negatif olmayan sınırlardan, R matrisinin simetrikliği ve büyüklükleri ile ilgili özellikleri r_{ii}, r_{ij} ve r_{jj} elemanları arasındaki ilişki şu şekilde verilmiştir.

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &\leq \sqrt{r_{ii}.r_{jj}} \\ |r_{ij}| &\leq \sqrt{(1-r_{ii})(1-r_{jj})} \\ |r_{ij}| &\leq \sqrt{r_{ii}(1-r_{ii})} \\ |r_{ij}| &\leq \sqrt{r_{ji}(1-r_{jj})} \end{aligned} \qquad (135)$$

Son iki eşitlik sadece $r_{ii} + r_{jj} = 1$ olma durumunda geçerlidir [52].

İlk dengelemeden sonra (134) eşitliğinde verilen ilişkide dikkate alınarak, her düzeltme için test değerleri hesaplanır. Klasik uyuşumsuz ölçüler testinde test değeri iteratif olarak hesaplanır ve sadece en büyük değerli düzeltmenin ölçüsü ölçü grubundan çıkartılır.

İstatistiksel sınırlarla her düzeltmenin test değeri karşılaştırıldıktan sonra fuzzy kümede düzeltmeler iki gruba ayrılır. Normal düzeltmelerin gözlem grubu (istatistiksel sınırın altındaki test değerleri) $N\{V_i\}$, anormal düzeltmelerin gözlem grubu (istatistiksel sınırın üstündeki test değerleri) $M\{V_i\}$

İstatistiksel sonuçta, istatistiksel limiti önemsiz değerde aşan testin gözlemleri de anormal gözlemler kümesine dahil olurlar. Bu kararsız (kesin olmayan) durumun çaresini bulmak için redundans matrisinin elemanları ve gözlem hataları arasında fuzzy üyelik ilişkisi kullanılabilir.

Hipotez testlerinden sonra, üyelik fonksiyonu düzeltmelerin üyeliğini gösterir. İstatistiksel limitin altındaki test değerlerinin oluşturduğu N{V_i}alt grubunun elemanları sıfır üyelik değerini alır. İstatistiksel limitin üstündeki test değerlerinin oluşturduğu M{V_i}alt grubunun elemanları ise istatistiksel limitin sapmaları, serbestlik derecesi ve testin güven durumuna göre [0,1] arasında üyelik değerini alırlar. Bunun anlamı büyük uyuşumsuzluklardan büyük ölçüde etkilenerek oluşturulan düzeltmelerin karışmasıyla üyelik fonksiyonları oluşturulur.

$$m_{\tilde{M}(Vi)} = \begin{cases} 0 & T_i < t_i \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{f}{n}\left(\dfrac{\alpha}{T_i - t_i}\right)^2} & T_i > t_i \end{cases} \tag{136}$$

Yukarıdaki fonksiyona göre her düzeltmenin üyelik fonksiyonu hesaplanır. Serbestlik derecesi f'nin artması hassasiyeti azalacağı için serbestlik derecesi f fonksiyonunun özellikli (karakteristik) parametresi olmak zorundadır [51].

(136) eşitliği kullanılarak, uyuşumsuz ölçülerden çok fazla etkilenmemiş düzeltmelerin üyelik fonksiyonları da fuzzy küme teorisinden kolayca hesaplanabilir.

$$m_{\tilde{N}(Vi)} = 1 - m_{\tilde{M}(Vi)} \tag{137}$$

Gözlem hatalarının fuzzy üyelik ilişkilerini belirlemek için redundans matrisinin satır satır elemanlarının normalleştirilmesi kullanılır.

$$\tilde{r}_{ii} = \frac{|r_{ij}|}{\max(r_{ij})} \qquad i, j = 1,2,.........., n \tag{138}$$

(138)'e göre normalleştirilerek elemanları 0 ve 1 arasında olan rölatif redundans matrisi elde edilir. Matrisin satırları ve sütunları sırayla her düzeltmedeki gözlem hatasının rölatif etkisini ve düzeltmedeki gözlem hatalarını gösterir.

Gözlem hataları da düzeltmelerdeki gibi iki grupta ele alınabilir. Örneğin A alt grubu anormal düzeltmelerde max. etkiye sahip gözlem hatalarından, B alt grubu normal düzeltmelerde min. etkiye sahip gözlem hatalarından oluşabilir.

Daha önce anlatıldığı gibi A ve B kümelerinin üyelik değerlerini tanımlamak için $\tilde{R}$ rölatif redundans matrisi ve üyelik değerleri $m_{\tilde{A}(\Delta i)}$ ve $m_{\tilde{B}(\Delta i)}$ olsun. Üyelik değerleri şu şekilde hesaplanır.

$M_{(Vi)}$ fuzzy kümesinde $m_{\tilde{M}(Vi)} \geq 0{,}5$ üyelik değerine sahip olan düzeltmelerde i. gözlemin hatasının max. rölatif etkisi belirlenir.

$$\tilde{r}_{ij} = \max_{k - u, v, \ldots\ldots, e} \left(\tilde{r}_{ki}\right) \qquad k < n \tag{139}$$

Sonra gözlem hatalarının üyelik fonksiyonu hesaplanır.

$$m_{\tilde{A}(\Delta i)} = \tilde{r}_{ji} m_{\tilde{M}(Vi)} \tag{140}$$

aynı şekilde B kümesinin üyelik fonksiyonu da

$$m_{\tilde{B}(\Delta i)} = \left(1 - r_{mi}\right) m_{\tilde{N}(Vi)} \tag{141}$$

şeklindedir. $m_{\tilde{N}(Vi)} \geq 0{,}5$ üyelik değerine sahip olan düzeltmede i. gözlemin hata sınırı max. rölatif etkisidir ve şu şekilde hesaplanır.

$$\tilde{r}_{mi} = \max_{k - x, y, \ldots\ldots, z} \left(\tilde{r}_{ki}\right) \tag{142}$$

Büyük hatalardan çok fazla etkilenen gözlemler anormal düzeltmelerde max. etkiye sahiptirler. Buna rağmen bu gözlemler normal düzeltmelerde min. etkiye sahiptirler. (140) ve (141) eşitliğiyle verilen üyelik fonksiyonunun min. değeri tartışılan ℓ_i gözlemlerinin sınır dışındaki derecesini gösterir.

Fuzzy küme teorisine göre, A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi H kümesini oluşturur.

$$m_{\tilde{H}(\Delta i)} = \min\left\lfloor m_{\tilde{A}(\Delta i)}, m_{\tilde{B}(\Delta i)} \right\rfloor \tag{143}$$

H kümesinin elemanlarının üyelik değerlerine dikkat edilirse, gözlemlerin sınır değerleri ne kadar büyükse gözlem değerlerinin de büyük olduğu sonucu çıkarılabilir. Bu nedenle, gözlemlerin üyelik fonksiyonları ya da sınırlarıyla karar verilebilir.

Anlamlı sınırlı bir değer belirlemek için ağırlıklı ortalama fuzzyleştirme metodu kullanılır.

$$C_H = \frac{\sum P_i \, m_{\tilde{H}(\Delta i)}}{\sum P_i} \tag{144}$$

Burada,

$$P \Rightarrow \begin{cases} m_{\tilde{H}(\Delta i)} \in m_{\tilde{A}(\Delta i)} & P_i = \tilde{r}_{ji} \\ m_{\tilde{H}(\Delta i)} \in m_{\tilde{B}(\Delta i)} & P_i = 1 - \tilde{r}_{mi} \end{cases} \tag{145}$$

Sonuç olarak üyelik fonksiyonu $m_{\tilde{H}(\Delta i)}$ C_H değeriyle karşılaştırılır ve $m_{\tilde{H}(\Delta i)} > C_H$ ise gözlemlerin sınır dışında olduğudur, farklı bir kümede olduğuna karar verilir [46], [51] [52].